

整理の仕方とレッドモンドグラフ

金光 三男

名誉教授

Manners of Arrangement and Redmond Graphs

Mitsuo KANEMITSU

Professor Emeritus of Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

I はじめに

1 バス停と演算の歴史

良く知られたバス停を使用し、演算の歴史を交えて述べてみよう。

円周上にバス停が6か所あるとする。これを右回りに0, 1, 2, ..., 5と名前を付ける。右回りに進むとき“+”で、左回りに進むとき“-”と考える。バス停の集合は $\{0, 1, 2, \dots, 5\}$ でこれを Z_6 とする。バス停と1対1にして考え、式で書くと $Z_6 = \{0, 1, \dots, 5\}$ となる。

最初は0のバス停にいるとする。何処のバス停に居るか $Z_6 = \{0, 1, \dots, 5\}$ に演算を導入する。3+4は3つ右回りで行き、更に4つのバス停を右回りで進むことをあらかず。結果として行き着く所はバス停1である。同様に引き算に対しては、3-4は右に3進み4だけ左回り行くことと、解釈できるから、結果として行き着くところはバス停5である。

バス停と1対1の対応から数 $\{0, 1, \dots, 5\}$ が生まれたと考えることが出来、[数える] から「演算」へと移行していった。演算は最初には加法と減法だけであった。それが繰り返して加法を行うことから、乗法が徐々に発達してきた。しかし最初は2倍することだけであったといわれている。乗法よりずっと後に、除法があらわれた。ただ、半分という概念は比較的古くから、発達していた。

今のバス停の場合では除法はバス停の個数が素数の時しか定義できない。これは素数のとき、バス停の集合が四則演算が自由にできる体になることによる。

このように演算は長い年月をかけて生まれてきた。

バス停の個数は固定した n でこの Z_n を含む集合、例えば、 Z_n の要素を係数とする整式のつくる集合では除法を除く加法・減法・乗法の演算を行うことができ、この Z_n の場合の拡張になっている。これは Z_n 係数の多項式環とも呼ばれる。 $Z_n[X]$ と書かれる。

何回目のバス停に停止したか回数は無視していることに注意したい。この小論では $n=40$ の場合で Z_{40} を考察する。

II レッドモンドグラフからの課題

1 バス停の2つの積がバス停1に止まるもの

円周上に40ヶ所のバス停を持つとき、乗法を行いバス停3とバス停27の積は81だからバス停1に止まる。このように積が1なるバス停3も27も Z_{40} の単元という。この単元の全体を $U(Z_{40})$ で表すと、この集合の元は全部で16個ある。列挙すると

$U(Z_{40}) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$ となる。

この単元の個数は以下で定義するオイラー関数で求めることが出来ることが知られている。

2 オイラー関数

自然数 $n = p^e q^f r^g \dots$ (各 p, q, r, \dots は素数) を n の素因数分解とする。 n と互いに素である n 以下の自然数の個数を $\phi(n)$ とする。

$$\phi(n) = n(1-1/p)(1-1/q)(1-1/r) \dots$$

これを使用すれば、

$$\phi(40) = 40(1-1/2)(1-1/5) = 16$$

となり、上で述べたものと一致する。

[K2] でも述べたが定義の理解は重要である。

3 数学では、定義の内容の理解が必要である

定義からグラフの内容を描いてみよう。

剰余環 Z_{40} とは、 $Z_{40} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 39\}$ で加法などの演算の結果は40で割った余りに置き換えるものとする。どこで置き換えてもよい。丁度複素数を含む式で、虚数単位を i としたとき、 $i^2 = -1$ をどの場所

で置き換えても良いことと同様である。

Z_n は整数の分類を粗く考えるときに使用する。

剰余環 Z_{40} のイデアル $(8) = \{0, 8, 16, 24, 32\} = (24) = (16) = (32)$ によるレッドモンドグラフ $G = (V, E)$ の定義は、グラフ G の頂点集合 V が $V = \{a \in Z_{40} - (8) \mid \text{ある } Z_{40} - (8) \text{ の元 } b \text{ が存在して } ab \in (8)\}$

であるとする。この定義内の $Z_{40} - (8)$ の $-$ は差集合を表す。異なる2つの頂点 a, b が辺 (隣接している) をなすとは、 $ab \in (8)$ のときをいい、このとき a と b のなす辺を $[a, b]$ と記す。このレッドモンドグラフを簡単に $\Gamma_{(8)}(Z_{40})$ と記す。まとめると、 $\Gamma = \Gamma_{(8)}(Z_{40}) = (V, E)$ において、

$$V = \{a \in Z_{40} - (8) \mid ab \in (8) \text{ for } \exists b \in Z_{40} - (8)\},$$

$$E = \{[x, y] \mid xy \in (8), x, y \in V, x \neq y\}$$

4 単元は頂点にならない

a を単元とする。 $ab \in (8) \text{ for } \exists b \in Z_{40} - (8)$ と仮定する。 a の乗法による逆元を c とすると、 $ac = 1$ だから、 $b = (ac)b = abc \in (8)$ となり矛盾。

よって、頂点集合の候補点は V から16個の単元と (8) の元5個の計21個を除いた

$\{2, 4, 5, 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 38\}$

の19個である。更に頂点は二つの積がイデアル (8) に属することと、定義より4の倍数を除くから、 $\{5, 15, 25, 35\}$ はどの頂点の積も8の倍数にはならない。よって、この4個の元は頂点にならない。

結局15個の頂点が V であり、

$V = \{2, 4, 6, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 34, 36, 38\}$ となる。

辺の集合は $E = \{[x, y] \mid xy \in (8), x, y \in V, x \neq y\}$ であり、どの頂点も偶数だからもう一つは4の倍数だと2つの積が8の倍数で (8) に入る。

5 このグラフの整理の仕方を考察する

将棋の米長邦夫は、「砂浜で、ある特徴を持つ砂が必要な時、どの場所でその砂を取るかは、資質が大きく影響する」と述べている。また、古来より空に輝く星の考察に星座に名前を付けて呼び、イメージが残りやすく説明や計算しやすいように、また米長のいう特徴を持つ砂のことを考慮して V の元も二つのグループに分け考察する。

4を因数に持つが8を因数に持たない5つの頂点を A とすると、クリーク (どの2つの元も辺で繋がっている頂点の集合) をなし $A = \{4, 12, 20, 28, 36\}$ となる。この A は4を因数に持ち、頂点はすべて偶数だから積が8の倍数となる。それ以外の頂点 $B = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38\}$ は、星に例えて天上の星と名付ける。この天上の星 B の元は偶数であり、4の倍数ではない。どの頂点も4の倍数である底辺の頂点との積は8の倍数だから辺で繋がっている。

B に属する頂点同士は8の倍数ではないから辺で繋がっていない。

よって10個の星と底辺の各頂点に繋がる辺は50個、 A の内部では ${}_5C_2 = 5 \cdot 4 / 2 \cdot 1 = 10$ 個だから、合計60個の辺を有することになる。

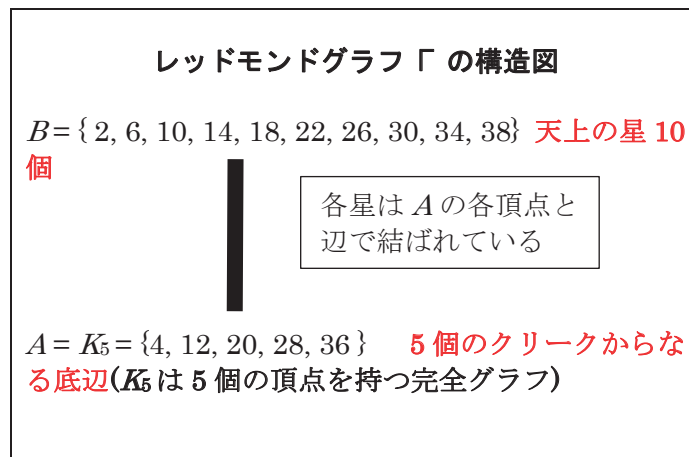
6 一般論の復習

一般論については、 $[B]$, $[NN]$ や $[T]$, そして $[Ko]$ などの文献が参考になる。

最初 I. Beck が0を含む零因子グラフを考察し、その後 Anderson などが0を除いて拡張を行い、また多くの研究者がこれを研究した。このレッドモンドグラフは S. P. Redmond がこれを最初に研究した $[R]$ 。

n 個の頂点 a_1, a_2, \dots, a_n を持つグラフ G の隣接行列とは、次のようにして決まる n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ のことである。(ここで $a_{ij} = (2$ つの頂点 a_i と a_j が隣接していると1でそうでないとき0とする)。この n 次の

表 1. Γ の構造図



正方行列 A の固有多項式 $|\lambda E - A|$ をグラフ G の固有多項式という。ここで E は単位行列とする。

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + C_3 \lambda^{n-3} + C_4 \lambda^{n-4} + \dots + C_n$$

例として n 次の完全グラフ K_n の固有多項式は

$$f(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1} \quad ([NN, \text{第8章 p. 163}])$$

完全二部グラフ $K_{p,q}$ とは、 p 個の頂点グループと q 個の頂点グループがあり、異なるグループのすべての2頂点間に辺がある2部グラフ（ここで2部グラフとは頂点が2つのグループに分けられ、同じグループの頂点同士は辺で結ばれていないグラフ）のことである。このグラフに関しては、例えば [K3] を参考にして欲しい。

この完全2部グラフ $Z_{p,q}$ に対しては、頂点数は $p+q$ で辺数は pq 、三角形は0、四角形の個数は $1/4pq(p-1)(q-1)$ である。固有多項式は

$$f(\lambda) = \lambda^{p+q} - pq \lambda^{p+q-2} \text{ となる } ([K, \text{p. 64}])$$

一つの頂点 v から出ている辺の総数をその頂点の次数と言ひ、 $d(v)$ と記す。2辺の4つの頂点がどれも異なるとき1個の2-マッチングという。この総数を n_M とする。頂点数が n の単純グラフで各頂点 (d_1, d_2, \dots, d_n) の次数を大きい順（重複も考慮に入れて）に並べたものを次数列という。次数列が d_1, d_2, \dots, d_n とする。このとき

$$n_M = 1/8 (\sum d_i)^2 - 1/2 \sum d_i^2 + 1/4 \sum d_i \text{ (ここで } \sum \text{ は } 1 \text{ から } n \text{ までの和)} [JK]$$

今の Γ では、次数列は $\{14, 14, \dots, 14, 5, 5, \dots, 5\}$ で、 $\sum d_i = 120$ 、 $\sum d_i^2 = 1230$ 。これより

$$n_M = 1/8 \times 120 \times 120 - 1/2 \times 1230 + 1/4 \times 120 = 1800 - 615 + 30 = 1215$$

因みに、完全二部グラフでは、

$$n_M = 1/2mn(m-1)(n-1), n_C = 1/4mn(m-1)(n-1)$$

また、例えば、[T, p. 89] や [K, p. 64] などより、 A は対称行列で対角線上の成分はすべて0だから、

$C_1 = 0$ 、また $-C_2 =$ (辺の個数)、 $-C_3 =$ (三角形の個数の2倍)、 $C_4 = n_M - 2n_C$ ([K, pp. 63-64])。

7 三角形の個数の計算

レッドモンドグラフ $\Gamma = (V, E)$ に戻って、辺の総数は、頂点2個で一つの辺ができる。天上の星同士は辺をなさない。三角形は3つの頂点が必要だから、次の場合がある。

- 天上の星1個と底辺の2頂点からなる1辺
- 星に関係せず（星は0個）底辺だけの場合（3つの底辺の頂点）
 - の場合は底辺の辺は ${}_5C_2 = 10$ で天上の星は10個であるから100個の三角形ができる。
 - の場合は ${}_5C_3 = 10$ 個。三角形は合計110個できる。従って $C_2 = -220$ である。

8 4-サイクル（四辺形）の個数

(4-サイクル) は一組の四辺形 $abcd$ から、凸四辺形 $([a, b] - [b, c] - [c, d] - [d, a])$ なる1個と、2つの蝶型四辺形 $([a, b] - [b, d] - [d, c]) - [c, a]$ 及び $([a, c] - [c, b] - [b, d] - [d, a])$ の合計3個出来る。

次の場合がある。

- 天上の星1個から地上に注ぐ2本の辺と底辺の2辺からなる型
 - 星2個と底辺の2個の頂点から出来る場合
 - 底辺のみで出来る四辺形
 - の場合は底辺の2辺は ${}_5C_3 = 10$ 個だから天上の星10個分は100個。
 - 天上の星の場合が ${}_{10}C_2 = 45$ 、地上での頂点の場合が10通りだから、結局450個。
 - 底辺のみで出来る四辺形は ${}_5C_4 = 5$ だから5通りだが、先にもにべたように4点から3個の四辺形ができるから15個。よって合計565の四辺形ができる。
- 2-マッチングの個数 $n_M = 1215$ だから、[B] より $C_4 = n_M - 2n_C = 1215 - 2 \times 565 = 85$ 。

9 Γ の固有多項式 $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \lambda^{15} - 60 \lambda^{13} - 220 \lambda^{12} + 85 \lambda^{11} + (\text{10次以下の項})$$

λ の絶対値が非常に大きくて下位の項ではあまり影響を受けないような現象については、何かの情報が得られるかもしれない。

頂点 u と v の距離とは、 u と v を結ぶ最短の道の長さの個数をいう。グラフのすべての2頂点間の距離の最大値をそのグラフの直径という。

このグラフには切断点（グラフのある頂点を取り去るとグラフの連結成分が増える頂点）も橋（グラフから辺を取り去ると連結成分の個数が増えるような辺）も存在しない。

よってグラフ Γ は橋も切断点も存在しないので、安全な情報網である。

III 情報伝達問題（生活的概念 [ku]）とレッドモンドグラフを関連付ける

一般のグラフで定義を述べる（[K₀, 2013年]）。

情報伝達問題：クラスの生徒を頂点で表し、アドレスを知っている人同士を辺で結ぶとする。このようなグラフを $G = (V, E)$ とする。ここで $V = \{\text{クラスの生徒}\}$ 、 $E = \{e \mid e = [a, b] \text{ は } a \text{ と } b \text{ がお互いのアドレスを知っている}\}$ とする。クラス内の誰かがある情報を知つ

た時、メールで情報を伝えるのに1分かかるとする。(アドレスを知っている人には同時に送信できるものとする) 全員にその情報が伝わるのに何分かかかるか。それは、情報を最初に知ったのが誰であったかに依る。どの生徒が最初に情報を知った場合でも、何分あれが全員に伝わるか。その最大の時間を $\text{time}(G)$ 分で表す。

少し考えれば、グラフの直径 = $\text{time}(G)$ が分かる。従って $\text{time}(\Gamma) = 2$ がいえる。

[K2] では $\text{time}(G) = 1$ のグラフ G を考察した。

このときのグラフも橋も切断点も存在しない安全なグラフで基礎のイデアルは (4) で、レッドモンドグラフは完全グラフ K_{10} であった。

IV まとめ

高校数学の順列・組み合わせを用いて、レッドモンドグラフの特徴の整理の仕方として Γ の辺の個数、三角形の個数、四辺形の個数を使用して求めてみた(この内容は、情報伝達も含めて生活的概念と考えることができる)。これは [K2] の姉妹編と考えて色々と比較すると興味深い。ここでは更に線形代数で扱う固有変数の11次以上の項の係数を求めた。線形代数の易しい具体的内容を扱い、それによって興味を持ちながら学生が探求心を持つことが期待される。

橋も切断点も両方ともなくても、情報伝達問題ではかかる時間が1分と2分など異なることがイデアルを (4) とした場合と (8) とした場合のレッドモンドグラフから判明した。イデアルの基礎が変わるとレッドモンドグラフは大きく変化する。(8) としたレッドモンドグラフは、10個の天上の星から、底辺の5個からなる頂点のなすクリークの頂点全てに繋がる辺を持つものであった。(4) のときは頂点数が10個の完全グラフであったから、(8) が (4) に含まれるイデアルであっても、この2つのグラフの相違が見て取れた。レッドモンドグラフの定義だけからでは見えにくい内容が、具体的なイデアル (4) や (8) で扱うことによって理解しやすくなり応用も効く。

大学生が可換環の一般論として、レッドモンドグラフを描き多くの課題を学習者が見つけることができる。深く理解するのに無味乾燥に近い定義式から可換環の具体例を扱いながら、目に見える形で数学を考察することができる。

数学教育の教材としては、グラフ理論から [K4] で彩色数が素数になる題材を与えているが、まだまだ教材の数が少ないので開発の余地が残っている。

また多くのレッドモンドグラフの具体的な例が [K5]

には、与えてある。そこでは Z_n の n が30までが掲載されている。そのような具体例などからも教材の与え方が、数学としての発達の歴史的順序とは逆になっても、整理統一得られる論理的配列教材の方が、学生によっては、興味を喚起できる可能性がある。

有限グラフを扱うので、無限個の整数環 Z の剰余環 Z_n で有限個の元にしてグラフと関連させた。具体的な環を扱いながら可換環の一般論に行ったり来たりして代数の学習ができる。 Z_n は見え難い事柄から不必要なものを捨て去って、必要な事のみを浮き彫りにして考察したものである。イデアルや環は多くの具体例に支えられて発展してきた。このことが実際のこのような可視的で具体例を扱うことにより実感できると思われる。

豊富な具体例によって一般論は形成され支えられていることが確認できると思われる。

引用文献

- [B] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory* (second edition). Cambridge University Press, 1993
- [JK] Y. Jin and M. Kanemitsu, Beck' graphs associated with Z_n and their characteristic polynomials. *International J. Applied Math. and Statistics* 11, No.7, (2007) 81-93.
- [K] M. Kanemitsu, The number of distinct 4—cycles and 2—matchings of some zero—divisor graphs. (In edited by M. Ito, Kobayashi and K. Shoji, *Automata, Formal Languages and Algebraic Systems*), 2010 62-69.
- [K2] 金光三男, 先人の数学教育観とレッドモンドグラフ, 愛知教育大学研究報告 第71輯(教育科学編)(2022), 163-165.
- [K3] 金光三男, ある剰余環のレッドモンドグラフと完全二部グラフ —教育系教科専門科目の教材の素材—, 数理解析研究所講究録2072 (2018), pp. 176-180
- [K4] 金光三男, 算数・数学教育の方法と教材研究—分数・素数・対称性などの教材化—(中部児童教育研究会編, 教職教育の新展開 2012 学術図書出版社) pp. 7-16.
- [K5] M. Kanemitsu, Note on some examples of the ideal-based zero-divisor graphs, *JP J. of Algebra, Number Theory and Applications*, vol.30, No.2 (2013), 115-129.
- [Ko] 小林みどり, あたらしいグラフ理論入門, 2013年
- [Ku] 黒木哲徳, 教育実践の観点から見た教科内容とその課題, 数理解析研究所講究録1657, pp. 94-104 2009年.
- [NN] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, 2005年, プレアデス出版
- [R] S. P. Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Communications in Algebra*, 31 (2003), 4425-4443.
- [T] 竹中淑子, 線形代数的グラフ理論, 1989年, 培風館.

(2022年8月30日受理)