イプシロン　2022. Vol.64，19 － 26

数学的な見方・考え方を働かせて資質・能力を育てる授業の考察 －中学３年「図形と相似」の指導－

愛知教育大学　髙　須　亮　平

１　はじめに

現行学習指導要領（平成 29 年告示）で重視されているポイントの１つに「見方・考え方」を挙げることができる。この「見方・考え方」は，資質・能力（知識及び技能，思考力，判断力，表現力等，学びに向かう力，人間性等）の育成に重要な役割を果たすことから，その具体的な内容が整理されている。しかし，「見方・考え方」については，抽象的であることから難しく感じることからか，小・中学校での授業においては十分な理解の基に授業実践がされているかどうかについて，十分とは言えない面があるのは事実である。そこで，算数・数学科における「見方・考え方」，すなわち，数学的な見方・考え方とはどのようなことかを授業場面に即して整理し，子どもが数学的な見方・考え方を働かせて資質・能力を育成するための授業は具体的にどうあるべきかについて考察する。

２　現行学習指導要領における「数学的な見方・考え方」

⑴　「見方・考え方」と「数学的な見方・考え方」

現行学習指導要領において，「見方・考え方」は「各教科等の特質に応じた物事を捉える視点や考え方」ということが明らかにされている。言い換えれば，各教科等の学習対象にどのようにアプローチしてどのような視点や考え方で捉えるのかという教科等の本質に迫るための視点や考え方と言える。また，「見方・考え方」は既に身に付けている資質・能力の三つの柱（知識及び技能，思考力，判断力，表現力等，学びに向かう力，人間性等）によって支えられ，「見方・考え方」が学びの過程で働くことを通して，資質・能力がさらに伸ばされたり新たな資質・能力が育まれたりするとされている。それとともに，その過程で「見方・考え方」もさらに豊かで確かなものになっていくと整理され，「見方・考え方」と資質・能力は相互に支え合う関係にあると捉えられる。

⑵　「数学的な見方・考え方」と資質・能力の三つの柱との関係

上記⑴を受け，算数科・数学科の目標は，はじめに「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質･能力を次のとおり育成することを目指す」と総括的に述べた上で，資質・能力の三つの柱ごとにその内容が設定されている。

そうすると，平成 29 年の学習指導要領の「数学的な見方・考え方」は，平成 20 年の学習指導要領に基づく評価の観点「数学的な見方や考え方」とは異なる概念となる。平成 20 年の学習指

導要領に基づく評価の観点「数学的な見方や考え方」は，資質・能力でいえば，「思考力・判断力・表現力等」に相当する。一方，平成 29 年の学習指導要領の「数学的な見方・考え方」は，資質・能力の三つの柱によって支えられるものとして位置付けられている。また，「数学的な見方・考え方」は，新しい知識・技能を既に持っている知識・技能と結び付けながら社会の中で生きて働くものとして習得したり，思考力・判断力・表現力を豊かなものとしたり，社会や世界にどのように関わるかの視座を形成したりするために重要なものとして位置付けられている。

その上で，算数科・数学科において，「数学的な見方」，「数学的な考え方」を明らかにして，「数学的な見方・考え方」を「事象を，数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること」と整理されている。そうすると，数学的な見方・考え方とは具体的な授業場面に即して考えるとき，どのようなことであり，それをどのように働かせれば資質・能力を育てることができるのかを明確にする必要が生まれる。

⑶　「数学的な見方・考え方」の具体的なイメージ

ここで，数学的な見方・考え方について，私たちが「数学」と言っているものは，現在，使われている数学の内容や現代数学の方向を指向しながらも，教育としての「数学」を念頭にしている。例えば，子どもの学びを振り返るとき，日々の算数・数学の学習の中で，単に文化遺産としての数学を学んでいるのではなく，教師の指導のもとで自分たちにとって「新しい数学を創っていく」という主体的な態度で学習を進めている。少なくとも教師はそれを目指している。

そのため，数学的な見方・考え方を働かせるとは，具体的な算数・数学の授業場面において，数学を創っていこうとするときの着想（何に着目して，その対象に対してどのようにアプローチするか）や手続き（着想にしたがって，どのように考えて解決していくか），その態度（自らの問題としてどのように新しいことを考え出したか）等として捉えることができる。具体的には，類推的な考え方，帰納的な考え方，演繹的な考え方などの推論の仕方としての考え方や，数学の内容や方法に関連した考え方等である。このような対象への着眼やアプローチの仕方が重要な学力の側面となり，算数・数学の本質的な意義を形成するものの１つとして「見方・考え方」を捉えることができる。

そうすると，子どもが算数・数学の内容を学ぶことは，教師が決まっているもの（解き方の手順等）を子どもに与えるのではなく，適切な発問や助言を通して，子どもが自分で必要を感じ，自分の問題として新しいことを考え出すようにすることとなる。その結果，どの子どももいかにも自分で考え出したかのような思いを持って問題を解決できるようにして，新たな資質・能力を身に付けることができるようにすることである。

３　「数学的な見方・考え方」を働かせ資質・能力を育成する算数科・数学科の授業
－中学校数学科「図形と相似」（３年）における授業－

⑴　「図形と相似」の授業とその学習問題

ここでは，次の問題１を証明する指導について，数学的な見方・考え方を働かせて，資質・能

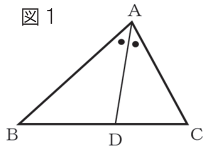
力の三つの柱を育む授業について考察する。

【問題１】

右図（図１）で，△ABCで∠Ａの二等分線と辺BCとの交点をＤとするとき，

AB：AC＝BD：DC　を証明しよう。

図１



⑵　問題１の教科書（啓林館「数学３」）での扱いと授業の進め方

①　問題１の教科書での位置付けとねらい

問題１が位置付けられているのは以下の内容を学習した後である。

ⓐ　相似な図形について

対応する線分の長さの比はすべて等しく，対応する角の大きさはそれぞれ等しいこと。

ⓑ　平行線と線分の比について

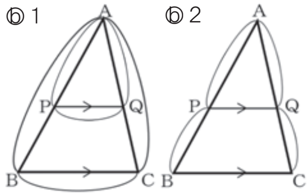
△ABCで，辺AB，AC上に，それぞれ点Ｐ，Ｑがあるとき，（図２）

・PQ∥BCならば，

AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC　　（ⓑ１））

・PQ∥BCならば，AP：PB＝AQ：QC（ⓑ２）

図２



このことから，問題１の証明にはⓐ，ⓑの内容の活用をねらいとしているようである。そのため，この内容が活用できるように適切な指導をしておくことが求められる。詳細は⑶で述べる。

その問題１の証明は，教科書では次のように記されている。

［証明］　右図（図３）で，点Ｃを通り，DAに平行な直線と，BAを延長した直線との交点をＥとする。

AD∥ECから，平行線の同位角は等しいので，

∠BAD＝∠AEC

また，平行線の錯角は等しいので，∠DAC＝∠ACE

仮定より，　∠BAD＝∠DAC

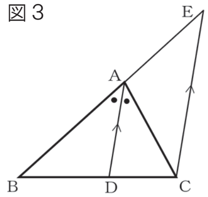
したがって，∠AEC＝∠ACE

２つの角が等しいから，△ACEは二等辺三角形となり，AE＝AC　……①

△BECで，AD∥ECから，BA：AE＝BD：DC　……②

①，②から，AB：AC＝BD：DC

図３



②　問題１の教科書の扱いと問題点

教科書では，具体例（AB＝６㎝，AC＝４㎝からBD：DCを求める）から一般化をして，それを証明する流れとなっている。このように授業を進めることは数学的活動の観点から重要である。しかし，１つの事例から一般化することはやや強引のようにも感じる。ここでは，学級の子

どもたちがそれぞれ異なった数値で試してみて,「問題１の命題がいつも言えるのはなぜか→証明してみよう」という意識のつながりを大切にしたい。

また,この問題１の証明は,点Ｃを通り,DAに平行な直線（補助線）とBAを延長した直線との交点をＥとして,上記図２⑮２を用いて証明が進められている。しかし,なぜ平行な直線を引けばよいのかは明記されていないので,教科書の証明を追認するようにして指導が進められる傾向がある。その進め方は授業者である教師に委ねられている。

③ 問題１の授業展開での問題点

上記②でも述べたが,平行な直線を補助線として引くことの理由が,教科書で明記されていないので,実際の授業では追認のような展開がされている。すなわち,なぜ補助線（平行な直線）を引くのか,子どもがその補助線をどのように気付くようにするのかという見方・考え方（着想,手続等）を基にした指導はあまり明らかにされていない。半ば,数学的なひらめきやセンスというような言葉で片付けられていることもある。それでは,数学的な見方・考え方を働かせた問題解決を通して資質・能力を育成することは難しい。

そこで,問題１の証明を進める際に数学的な見方・考え方を働かせるにはどう指導すべきかということにかかわり,具体的に子どもの着想,手続き等を明確にした授業のあり方を提案し,資質・能力の三つの柱を育成することについて考察する。

⑶ 本授業の指導に至るまでの学習履歴

問題１の証明に当たり求められることは,上記⑵①で,線分の比について「相似な図形」や「平行な直線」の場合には「線分の比を等しく移すことができる」ことを統合的にまとめ活用できるようにしておくことである。そうすれば,「線分の比」に関係する問題が発生したときに,そのことを想起し,「等しく比を移すことができる」ことを活用することができる。ここでは,そのように関係する知識をあらかじめ丁寧に習得し活用できるようにしておくことが大切である。

⑷ 数学的な見方・考え方を働かせる授業展開

数学的な見方・考え方を働かせることについては,前述したように「新しい数学を創っていこうとするときの着想,手続き等としても捉えることができる。そう考えれば,自ら新しい数学を創っていくという主体的な態度をも育てることができる。

そこで,問題１の証明を指導する上での着想,手続き等について考察することで,次の①〜⑦に示すように,着想１から着想７を考え展開することができる。また,学習問題について問題１から問題２,問題３へと発展的に広がっていく。

① 着想１

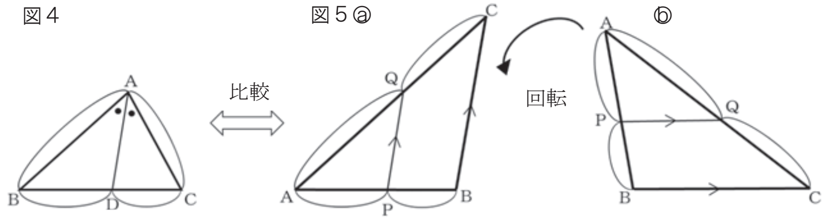
まず,問題１はどういう問題かを把握することができるようにする。ABとACの線分の比が,BDとDCの線分の比と等しいことの証明であるから,「角の二等分線は線分の比を等しく移す」ことを証明する問題と捉えられる。だから,着想１として問題１と似ているものをこれまでに学習していないか,似ているものがあればどのように解いたかを想起できるようにする。そこで,既習内容である「平行な直線は線分の比を等しく移す」ことを想起できれば,「角の二等分線」

を「平行な直線」と類推的に考えて活用できないだろうかと見通しをもつことができる。

② 着想２

そして，例えば，問題の図形（図４）と既習（平行線と線分の比）の図形（図５ⓑ）で似たところはないかと探る。これが着想２である。図４と図５ⓑは一見違ってはいるが，似たところの位置をそろえようとすると，図５ⓑの図形を回転させてみて図５ⓐとする。そして，違っているところを見つけて，それを似た図形と同じようにして考えられないかと探る。

図４　図５ⓐ　ⓑ



問題１の図　平行線と線分の比の図

そうすると，図４のBD，DCと図５ⓐのAP，PBの位置がそろうので，両者の違いが明らかになる。そして，図４を図５ⓐ（平行線と線分の比の図）のようにしようと考えることができる。

③ 着想３

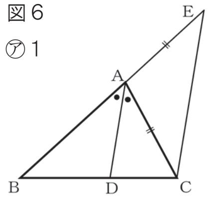
ここで，図４のABとACは折れ線だから，これを図５ⓐのAQとQCのようにまっすぐな直線にするために図４のBAを延長しようということを考えることができ，次のような２つの着想を思いつくことができる。（図６）

㋐１　ACを等しくなるように移せば，辺の比は等しくなる。（線分BAを延長し，その線上にAC＝APとなる点Ｐをとる。）

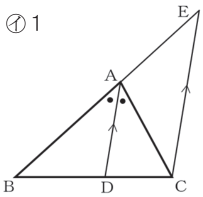
㋑１　ADと平行な平行線を引けば線分の比は等しく移るから，辺の比は等しくなる。（AD∥PCとなる点Ｅを線分BAの延長上にとる。）

図６

㋐１



㋑１



この２つの着想を基にすると，図６㋐１，㋑１のような２つの補助線の引き方が考えられる。これらは，既習内容を基にした着想を生かしているので，数学的なひらめきとかセンスではなく，ある面では必然的に補助線を引くことになっている。この２つの補助線により，既習の内容をさらに類推的に考え活用させながら演繹的に推論を進めることができる。しかし，この２つの補助線の引き方からは，㋐１，㋑１ともに同じような図はできるが，着想が異なっているため，その手続きは異なり証明の内容も当然のように違ってくる。

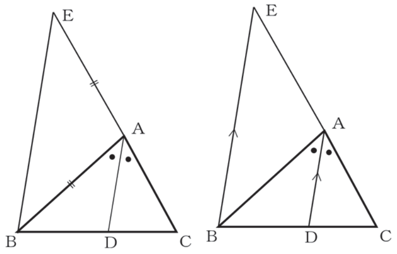
④ 着想４

また，図６㋐１，㋑１はともにBAを延長しているが，それぞれCAを延長するという着想，手続きも考えられる。だから，図６㋐１に対して図７㋐２，図６㋑１に対して図７㋑２となる。これら㋐１と㋐２，㋑１と㋑２の着想，手続き等はそれぞれ同じようであり，延長する辺が違うだけであるから，㋐２の証明は㋐１の証明の記号ＢをＣに入れ替えるだけでほぼ同じものとなる。

㋑２の証明も㋑１の証明と同様となる。

この㋐１と㋐２の証明，㋑１と㋑２の証明の比較・検討については，教師が類似していると判断して指導を省略しがちであるが，子どもがそれぞれを証明することを通して類似することに気付くようにしたい。そのことにより，条件がどのような場合に証明が類似するのかという類推的な考え方をさらに育てることができる。

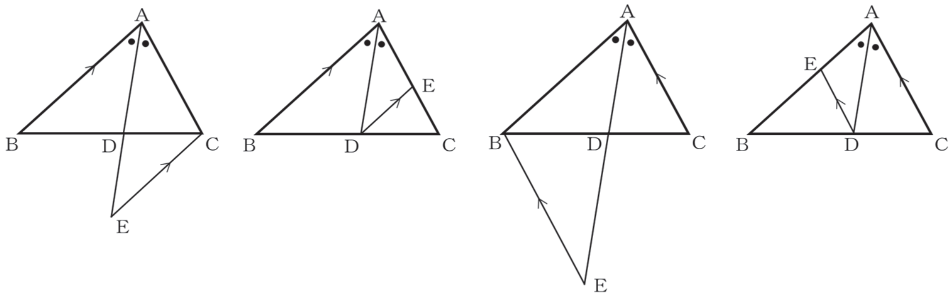
図７　㋐２　　㋑２



⑤　着想５

さらに，㋑のような平行な直線を引くことについては，ADに平行な直線を引く他にも，ABに平行な直線で点Ｃを通る場合（図８㋑３），同様に点Ｄを通る場合（㋑４）が考えられる。また，ACに平行な直線で点Ｂを通る場合（㋑５），同様に点Ｄを通る場合（㋑６）も考えられる。これらの証明については，どれも平行な直線を引くことでできる二等辺三角形の性質や，平行な直線により錯角が等しいことから相似となる三角形の対応する辺に着目した展開となる。特に，㋑３と㋑５，㋑４と㋑６の証明は，着想が似ていていることもあり，同様な証明になることを確認することができる。

図８　㋑３　　㋑４　　㋑５　　㋑６



この段階での授業での取り扱いは，決められている指導時間を超えることが予想されるので，興味を持たせながら課題学習や自由研究などとして発展的に扱うとよい。

このように，数学的な見方・考え方を育てることをねらいとした指導では，様々な着想とその手続きとを適切に働かせながら把握することが大切であり，それらが，知識・技能，思考力・判断力・表現力等，主体的に学びに取り組む態度を育てることに関係することが分かる。

⑥　着想６

この問題１は，さらに△ABCの「∠Ａ（の内角）」を「∠Ａの外角」とした場合も同じような事柄が成り立つかどうかを考えることができる。それは次のような問題２となる。

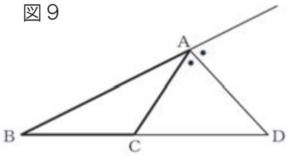
これを証明するために，問題１を証明したときの図６㋑１の場合と同じように証明できるか考えてみる。すなわち，ＣからDAに平行な直線を引き，BAを延長した直線（BF）との交点をＥ

【問題２】

右図（図９）で，△ABCの∠Ａの外角の二等分線と辺BCとの交点をＤとするとき，

AB：AC＝BD：DC　が成り立つだろうか。

図９



として，AEとACの長さの関係に着目してみる。すると，次のように，問題１の証明の論理と全く同じように証明が進められることを確認できる。

右図（図 10）で，AD∥ECから，

平行線の同位角は等しいので，∠FAD＝∠AEC

また，平行線の錯角は等しいので，∠DAC＝∠ACE

仮定より，　∠FAD＝∠DAC

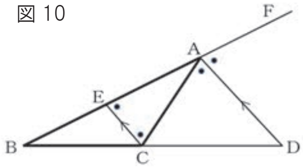
したがって，∠AEC＝∠ACE

２つの角が等しいから，△ACEは二等辺三角形となり，AE＝AC　……①

△BECで，AD∥ECから，BA：AE＝BD：DC　……②

①，②から，AB：AC＝BD：DC

図 10



ここで，「∠Ａ」を「∠Ａの外角」と変えても△ACEが△ABCの外側であったものを内側になるものと見れば着想は似てきて，その証明の進め方はほぼ同じになることに気付く。つまり，条件を変えて発展的に考えたものを統合的に考えて捉えることができる。

⑦　着想７

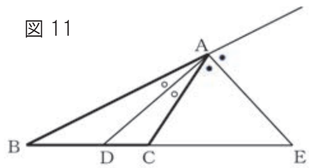
さらに，△ABCの∠Ａの内角の二等分線，∠Ａの外角の二等分線でできる線分の比についての問題１，問題２から，次のような問題３が考えられる。

【問題３】

右図（図 11）で，△ABCの∠Ａの二等分線と辺BCとの交点をＤとする。また，∠Ａの外角の二等分線と辺ＢＣとの交点をＥとする。

このとき，BC上のＢ，Ｄ，Ｃ，Ｅの並びはどうなるだろうか。

図 11



これについては，△ABCにおいて，次のように考えを進めることができる。

まず，問題１において，∠Ａの内角の二等分線から，AB：AC＝BD：DCが成り立つ。

次に，問題２において，∠Ａの外角の二等分線から，AB：AC＝BE：ECが成り立つ。

よって，AB：AC＝BD：DC＝BE：ECとなる。

したがって，BE上のＢ，Ｄ，Ｃ，Ｅの並びであるBD：DC：CEは，ある一定の比になっている。

このように，問題１の「三角形において，２つの辺がつくる角の二等分線は，対辺をその２つの辺の比に分ける」ことを巡る一連の数学的活動は，規定の数学の授業時間以外にも発展的に広がり，子どもたちに数学の面白さや楽しさを感じさせることができる。その過程では，数学的な見方・考え方を働かせることにより数学における本質的な学びを促し，既に持っている知識・技能と結び付けながら，問題解決の中で生きて働くものとして新しい知識・技能を習得したり，思考力・判断力・表現力を豊かなものとしたり，主体的に学びに取り組む態度を形成したりすることを可能にしている。そのため，具体的な場面に即して，どのような数学的な見方・考え方を働かせ，どのような資質・能力を獲得することを子どもに期待するのかを明確にして授業デザインを考えることが重要と言える。

４　おわりに

これまで数学的な見方・考え方の重要性が認識されながらも，現状としてはいろいろな調査結果等を見ても，指導によって子どもが数学的な見方・考え方を身に付けているとは言い難い面がある。これは，数学的な見方・考え方が抽象的であり，その育成のために具体的にどうしたらよいかということは，最終的には教師に任せられ，教師の考え方，捉え方，指導方法，指導力に大きく影響を受けてきたからとも考えられる。

もしそうであれば，逆にそれを利用できないか。数学的な見方・考え方の育成が教師に委ねられているならば，今回，「数学的な見方・考え方」を，問題を解決するときの「着想や手続き」と捉えたが，その「着想や手続き」を焦点化して他の場面（学習単元）での問題解決にも活用できるようにしたらどうか。そうすると，授業の中で見いだした子どもの着想や手続き，または教師が育てたいと考える着想や手続きは１つ１つ具体化され，授業の中での子どもの数学的な見方・考え方の実体として集約されるのではないか。そうなっていけば，抽象化という難点は解消されるだろう。

このような授業実践を通した試みを重視するためにも，言葉だけでなく，実際に具体的な場面に即して，数学を創り上げる活動をできるようにしていくことがさらに求められる。また，そのような授業実践を振り返って考えることで，教師も評価・改善できるようにしたいものである。そのような中で，新たな子どもの資質・能力の伸張は見られるに違いない。

［引用・参考文献］

中央教育審議会，2017「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善及び必要な方策について（答申）」

文部科学省，2018「中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編」，日本文教出版

岡本和夫ら，2020「未来へひろがる　数学３　みんなで学ぼう編」新興出版社啓林館

中島健三，2015「復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方」東洋館出版

片桐重男，1988「数学的な考え方・態度とその指導 1 数学的な考え方の具体化」明治図書