イプシロン　2022. Vol.64, 57 − 64

算数・数学の公式は何のために学ぶ

愛知教育大学　**佐々木　徹　郎**

１．はじめに

算数・数学科には「台形の面積の公式」や「二次方程式の公式」などさまざまな公式があり，学年と共に増えていく。20 年ほど前のいわゆる「ゆとり教育」の時代には，これらの公式を教えるかどうかという議論があった。日常生活でほとんど使わないこれらの公式は義務教育では不要ではないかという訳である。台形の面積公式は発展的内容となり，二次方程式の解の公式は，高等学校へと移行された。しかし，これらの公式の定着率は低下し，「学力低下論」とあいまって「ゆとり教育からの脱却」となった。現在では，これらの公式は主要な指導内容の一部となっている。

ところが，「算数・数学では，公式を記憶して，数をあてはめて問題を解くものだ」という学習観が，子どもに定着している。「数学的活動を通して，数学的に考える」という資質の育成に結びついていないところがある。「公式」をめぐる議論のなかに，算数・数学の公式は何のためにあるのか。数学的活動における役割や意義は何なのかといった議論がほとんどなかった。大げさにいえば，算数・数学の公式についての認識論がなかったことに，その原因がある。

２．大学院におけるある模擬授業

昨年，大学院の模擬授業による実践研究で，「公式」についての興味深い実践があった。これは，各教科でチームを組み，他教科の学生を対象として，模擬授業を行う大学院授業である。数学科のチームでは，図１のような星型多角形の内角の和を求める授業を提案した。これは，中学 1 年生の学習内容である。この授業では，それぞれの角度をただ求めるだけではなく，より一般的に，凸型の多角形では内角の和の公式はあるものの，星型の多角形では公式がないことを示すという目標を設定した。

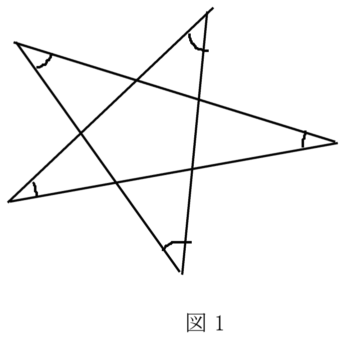


図 1

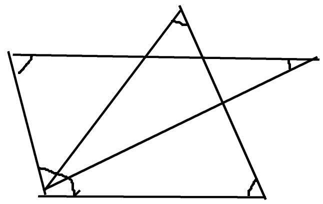


図２

図２のような「不規則な」星形は除いて，いくつかの「規則的な」星形の内角の和を求めさせて，それらの公式はないことを知らせる授業であった。授業後の検討会では，「学習指導要領からして，中学生には難しいのではないか」「何を学ばせたいのかよく分からなかった」などの意見があった。

教師としては，他の教科に比べて算数・数学の授業は，やりやすいといわれている。教科書通りに進めればできるからである。しかし，そこから踏み出して実践するとなると，教材研究など，さまざまな課題が顕わになる。「数学は，公式を記憶して，数をあてはめて問題を解くものだ」という多くの中学生がもつ数学観に挑戦することは，現在の教育課題を踏まえたものであり，野心的な目標である。この点では，評価できる。ただ，これを実践するには，「算数・数学の公式とは何か」という根本的な考察が不可欠であった。その上で，中学生に適した教材を開発することになる。

教材研究からいうと，実は規則的な星形多角形の内角の和の公式はある。一般の凸型ｎ角形の内角の和の公式は中学１年で学ぶ，次の公式である。

$$180^\circ \times (n-2)$$

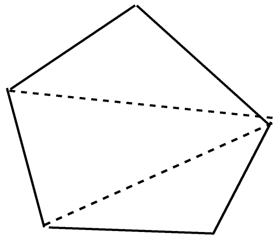


図３

例えば，五角形では図３のように，３つの三角形に分けられるので，公式の通りとなる。学部の教育実習生の授業で，ある生徒が図４のような三角形に分割した。その実習生は，教科書に載っていなかったので，予想していなかったのだろうか。これは誤りだといって授業を終えた。これには驚いた。一般に公式を導く方法は，何通りかある。図５のように，各頂点の外角の和が３６０°であることからも導ける。生徒が自分で理解しやすいものでいいのであり，また何通りかの

方法を考えることが大切である。この数学的活動は，中学生にとって重要な学習である。

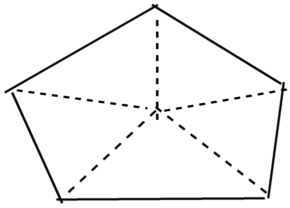


図４

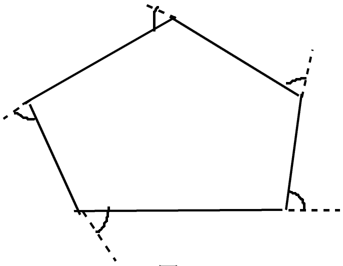


図５

図１のような星形多角形の内角の和には，次のような公式がある。

$$180° \times (n-2k)$$

ここで，ｎは頂点の数である。また，ｋは「頂点の隔たりの数」である。つまり，隣どおしならｋ＝１ であり，図１のように２つ先ならば，ｋ＝２ である。図１の星形では，ｎ＝５，ｋ＝２なので，180° となる。他の星形でも，規則的な図形なら成り立つ。その理由は，外角の和が「360° ×ｋ」となることから導ける。この他にも，ポアソンの星形という研究があり，面白い性質が知られている。分数の多角形の教材も開発されている。

３．数学的活動における公式の意義

数学的活動における公式の意義は何であろうか。算数で印象的な公式は，小学校４年の「長方形の面積公式」である。

「長方形の面積＝たて×横」

これは，あくまで公式であって，面積の定義ではない。教科書では，広さの直接比較から個別単位による比較の活動に始まり，「広さのことを面積といいます」とされている。さらに，「面積は１辺が１㎝の正方形が何こ分あるかで表します」という定義になっている。

したがって，算数では，たてと横の長さが小数や分数になったときも，この定義にしたがって公式が成り立つことを「ちゃんと証明」してある。このことは，本学会の会長であった石戸谷公直先生に教えていただくまで，筆者も気が付かなかった。算数の教科書は，意外に論理的にできているのである。ところが，中学校の数学で，辺の長さが$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$などの平方根のときに，この公式が成り立つという説明はない。「公式から，長方形の面積は $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 」となっているだけである。もっとも，これを証明するには実数論が必要となるので，大学レベルの数学になる。中学校の数学は意外に論理的でないところがある。

それでは，なぜそのような定義と公式の混同がおきるのであろうか。以前紹介したように，長方形の面積の応用として，図６のような図形の面積を求めるときに，図７のように１㎠の正方形に分割して，それを数える児童

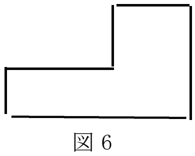


図６

がいる。これこそ，定義に基づいて面積を求める，素朴な考え方である。

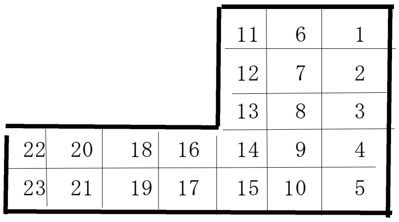


図７

これは，長方形の面積公式を学んだときに「かけ算」をすれば，「数えなくても計算できる」活動を体験していないことにもよる。つまり，「ひとつひとつ数えてみる」数学的活動と「かけ算のよさ」がわかる数学的活動がなかったことが原因である。小学校２年の「かけ算の意味」は，難しい内容である。「アレー図」あるいは「直積」の意味は載せていない教科書もあるほどで，やむを得ないところはある。図６のような応用問題で，改めて理解することはあって良い。

このような定義や既得の公式い基づいて探究する活動が，教科書に載っている公式の内容もある。例えば，三角形の面積の公式では，かなり丁寧に「児童の考え方」が述べられている。

三角形の面積 ＝ 底辺×高さ÷２

ここでは，底辺と高さという新しい要素があらわれる。三角形の辺の長さや角の大きさだけでは，この段階では，面積を表せない。三角比やヘロンの公式が必要となる。底辺や高さという見方は，児童には新しい要素であっても，面積公式は，長方形の面積から導ける上に，簡便である。したがって，三角形の面積を，長方形の面積の公式を活用して探究する活動が，一層重要なものとなってくる。

数学的活動のなかで，「一般化」という段階がある。長方形の面積なら，「たて２㎝，横３㎝の長方形」で終わるのではなく，「たて７㎝，横８㎝の長方形」のように，数えることが難しく，かけ算なら簡単に求められるような長方形での活動である。また，三角形の面積では，直角三角形からより一般的な三角形へと探究を広げていく活動である。この段階では，「方法の対象化（平林一榮，1987)」というように，問題解決そのものを越えて，より一般的に問題を解く方法が，考える対象になっている。

したがって，「数学的活動を通して，数学的に考える」資質の育成のためには，むしろ公式は直接に教えない方がよいことになる。「ゆとり教育」は正しかったともいえる。しかし，問題は，そのような一般化の活動にしっかりと時間を費やして，子どもが考える「ゆとり」がほとんどなかったことであろう。むしろその後，「学力向上」のために，公式を教えて，しっかり練習させるという指導が多くなったことが，現在の数学教育の課題へとつながっている。

数学的活動としては，「一般化」の活動段階から「形式化」の活動段階を経て，公式ができる。台形の面積公式のように，三角形や平行四辺形など，それまでに学んだ公式を使ういくつかの求

め方から，その解決方法を公式として形式化するのである。形式化と一般化の順序が逆になることはある。しかし，いきなり公式を教えるのでは，数学的活動にならない。

大学でのある授業で，教材研究として，台形の面積公式を何通りかの方法で導く問題を与えた。すると，およそ半数の学生は，「台形の面積公式から」といって公式に当てはまるだけの，筆者が理解に苦しむ解答をする。学生が，学校教育の中で，初めから公式を与えれており，「公式を導く」数学的活動をいかに体験していないかを物語っている。公式が，「一般化」や「形式化」などの数学的活動から創られるのではなく，絶対的な真理として，初めから覚えさせられているのであろう。

公式は，何のためにあるのだろうか。公式にあてはめることで，数学化の過程を省略できるからである。つまり，公式を記憶して使えば，「考える」という労力を節約できるのである。これは，数学のみならず，合理主義の態度である。Jablonka & Gellert(2007)は，数学的活動の過程を，「数学化－脱数学化」と呼んでいる。数学化で得た公式を適用することが，「脱数学化」であり，これは上手い命名である。公式を使うことで，数学的活動を短縮し，数学しなくても済むとおろができるのである。

４.「公式がない」という意味

現在の算数では，台形の面積だけではなく，ひし形の面積の公式も教えている。対角線の長さだけから面積が求められることは，興味深い。しかし，三角形と同様に，辺の長さや角の大きさだけでは，この段階では，公式はないことになる。公式が「ある」「ない」とは，どういうことなのだろうか。

数学科の大学生に，二次方程式の解の公式を知っているか尋ねた。さすがに，全員が完璧に記憶していた。そこで，一次方程式の解の公式はあるのかと聞いた。「ある」という学生と「ない」という学生に分かれた。「ある」という学生は，係数を文字にすれば公式ができるという意見である。「ない」という学生は，覚えていないということである。一次方程式の解の公式はあるものの，記憶して使う利点はあまりない。つまり，算数・数学の公式は，学習段階や簡便性，さらには実用性の観点から，学校数学で取り扱われる。円の面積や球の表面積・体積の公式は，無限の概念が含まれている点から，実用性が大きい。

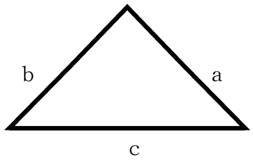
その問いの続きとして，3 次，4 次，5 次の方程式の解の公式について聞いた。3 次の方程式の解の公式は高等学校で聞いたことがあるという学生はいたものの，ほとんどは，その先は知らないということだった。5 次以上の方程式には解の公式がないという話は聞いたことがあるという学生はいた。代数学で「群論」は全員学んでいるようだが，どういう経緯で「群論」が生まれたかについてはほとんど知らないようである。

一般の 5 次以上の方程式には，四則演算や累乗根を使った解の公式がないという「ガロア理論」は，現在の教育学部のカリキュラムではとても無理である。また，現代の代数学では，群論が基礎であることは明白なので，仕方ないことではある。しかし，そのような経緯を知らずに学

修しただけなら，数学教師として中途半端になる。筆者が大学の頃は，「現代化」のまさに直前で，高校生で群のことは知っていた。大学に入って，ガロアの伝記などを読み，わくわくしながら難しい群論を学んだ記憶がある。それでも，中途半端の感はあった。今なお教育学部のカリキュラムには，このような課題がある。

　これに関連するので，「ヘロンの公式」についても，述べておこう。ヘロンは古代ギリシャの技術者であり，測量術を確立した。実用的観点からすると，三角形の底辺や高さよりも，各辺の長さから面積を測定する方が有用である。さらには，四角形でも各辺の長さだけから面積を求めることができるのかという問題がある。

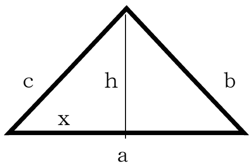
　三角形の面積についてのヘロンの公式は，次の通りである。



　三角形の３辺の長さをa，b，c として，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ としたとき，

　三角形の面積Ｓは，次の通りとなる。　$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

　筆者が大学に奉職した頃，西尾市の中学校教師　柘植知也先生から，ヘロンの公式は三角比を使わなくても，ピタゴラスの定理だけで証明できることを教えていただいた。つまり，中学校数学で証明できるのである。高等学校の内容が，意外に簡単に導けることに感心した。



三角形の面積をSとすると，　$S = \dfrac{1}{2}a\,h$

　ピタゴラスの定理から，

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$$

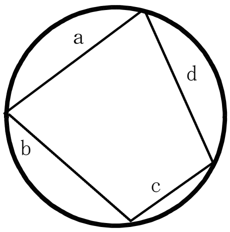
$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}}{2a}$$

ここで， 2s ＝ a+b+c とると， $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

　また，ヘロンの公式は，三角形から円に内接する四角形に拡張することができる。インドの数学者ブラマグプタ（598 ～ 660）の公式である。



　円に内接する四角形の 4 辺の長さを，a，b，c，d として，

$s = \dfrac{a + b + c + d}{2}$ とするとき，この四角形の面積Sは，次のようになる。

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

　ところが，円に内接しても，五角形あるはそれ以上の多角形では，このような代数式で表せる面積公式は存在しないことが，証明されている。これは，ガロア理論とよく似ている。実用のみならず，数学の観点からも，ヘロンの公式は興味深い公式である。

　このように，数学において，「公式がない」ということやそれを証明することは，相当に難しいことは知っておいた方がいい。

５．おわりに

高等学校数学の内容に，「行列」が入っていた頃，入試問題に毎年のように出題されていた。その採点の際，必ず答案のなかにあったのは，「ケーリー・ハミルトンの定理によって…」という解答であった。簡単な計算で求められるのに，わざわざその定理を使って計算を複雑にしたものがあった。筆者は大学で初めてその定理を学んだ。しかも，行列や行列式の計算の後，固有値のところで登場し，証明も難しかった。それを，なぜ高校生が知っているのか，不思議だった。しかし，受験参考書をみて，氷解した。まさに，受験数学のテクニックだったのである。

「主体的・対話的で深い学び」や「数学的活動を通して数学的に考える」，何れも本質的で重要な数学教育の目的である。しかし，公式や定理の理解から分かるように，それとはほど遠い現状がある。その一因は，もちろん「受験」である。このような状況では，生涯学習やサービス産業時代の知識社会に対応できなくなっている。学校教育のみならず，大学教育を含めて，幅広い観点からの改革が必要になっている。

つまり，「公式」として実体化（Sfard, 1991）する前に，「一般化」や「形式化」といった「数学化」として，数学的活動を十分に体験することが重要なのである。公式を記憶して使うという「脱数学化」だけを体験したのでは，「数学的に考える」ことを省略した算数・数学指導になっている。そのような数学的活動を体験する授業を構想していきたい。たとえ失敗しても，若い教師の挑戦には，将来の可能性が広がっている。

引用・参考文献

①平林一榮(1987). 数学教育の活動主義的展開，東洋館出版社.

② Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*: 1-36, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

③Jablonka, E.& Gellert, U.(2007). *Mathematisation and Demathematisation: Social, Philosophical and Educational Ramifications*. Sense Publishers, Taipei.