イプシロン　2022. Vol.64，65 − 70

ハノイの塔必勝法

愛知教育大学　**小　谷　健　司**

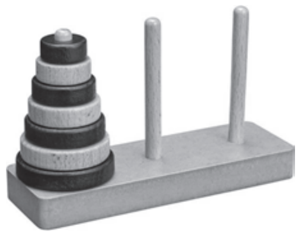
1　序

数年前, 附属岡崎小学校へ教育実習の研究授業を参観に行ったときのことです。その授業は**ハノイの塔**を扱った授業の 2 回めでした。ハノイの塔とは, 次のようなパズルです。

ハノイの塔. 3 本の杭と n 枚の円盤がある。円盤の大きさはすべて異なっており, 杭に刺すことのできる穴が開いている。はじめはすべての円盤が左端の杭に, 大きいものから順に下から積み重ねられている。このとき, 次のルールの下で, すべての円盤を右端の杭に移動させよ：

1. 1 手につき 1 枚の円盤を 1 つの杭の最上部から他の杭の最上部に移動することができる。
2. 円盤を移動する際は, 移動する円盤より小さい円盤の上には移動できない。

その授業で使っていたハノイの塔は, 右の写真のように円盤が交互に色付けされていました。ハノイの塔を使った授業の 2 回めということもあり, 授業時間外にも取り組んだ子どももいたようです。子どもたちはハノイの塔の性質をとてもよく理解していて,「同じ色を重ねないように動かすんだよ」と発言している子どももいました。授業は $2^n - 1$ 手ですべての円盤を移動できることを発見するところで終わりましたが, 子どもたちはそれ以上の発見をしていました。



次の解法は, 子どもたちの発見に, 手順がただ 1 つになるよう改良を加えたものです。

ハノイの塔の解法 (偶奇解法). 円盤には小さい順に $1, 2, 3, \cdots, n$, 杭には左から順に $0, 1, 2$ と番号を付ける。杭 $0, 1, 2$ の最下層にはそれぞれ番号 $n+1, n+2, n+3$ の見えない円盤 (仮想円盤) があるとみなし, それらは円盤 n より大きいとする。そして, 円盤 $1, 2, 3, \cdots, n$ を下記の手順で動かす：

1. 円盤を動かす際は, 偶数の円盤は奇数, 奇数の円盤は偶数の円盤の上に置く。
2. 1 つの円盤を 2 手連続で動かさない。

上記解法の 1 が子どもたちが発見した「同じ色を重ねない」を意味しています。ただし, それだけでは手順が定まらず, 迷う場面が起こります。そこで, 仮想円盤を導入しました。これで手順がただ 1 つに定まり,「次の手」に迷うことがなくなります。次の定理が成り立ちます。

定理 1. 円盤 n 枚のハノイの塔について,「偶奇解法」は $2^n - 1$ 手ですべての円盤を杭 0 から杭 2 へ移動する手順を与える。また, この解法は唯一の最小手数解法である。

円盤 5 枚のハノイの塔を偶奇解法にしたがって解くと, 表 1 が示すように, 31 手めですべての円盤を杭 2 に移動できることがわかります。

段階	杭 0	杭 1	杭 2
0	54321		
1	5432		1
2	543	2	1
3	543	21	
4	54	21	3
5	541	2	3
6	541		32
7	54		321
8	5	4	321
9	5	41	32
10	52	41	3
11	521	4	3
12	521	43	
13	52	43	1
14	5	432	1
15	5	4321	
16		4321	5
17	1	432	5
18	1	43	52
19		43	521
20	3	4	521
21	3	41	52
22	32	41	5
23	321	4	5
24	321		54
25	32		541
26	3	2	541
27	3	21	54
28		21	543
29	1	2	543
30	1		5432
31			54321

表 1: 円盤 5 枚の場合の最小手数解法

表 1 をながめると, 各円盤の移動には次の規則があることに気づきます：

- 円盤 1 は, 杭 0 に 1 回留まり,「左の杭に移動し 2 回留まる」を 15 回繰り返し, 左の杭に移動し 1 回留まる。
- 円盤 2 は, 杭 0 に 2 回留まり,「右の杭に移動し 4 回留まる」を 7 回繰り返し, 右の杭に移動し 2 回留まる。
- 円盤 3 は, 杭 0 に 4 回留まり,「左の杭に移動し 8 回留まる」を 3 回繰り返し, 左の杭に移動し 4 回留まる。
- 円盤 4 は, 杭 0 に 8 回留まり,「右の杭に移動し 16 回留まる」を 1 回繰り返し, 右の杭に移動し 8 回留まる。
- 円盤 5 は, 杭 0 に 16 回留まり, 左の杭に移動し 16 回留まる。

ただし, 杭 0 の左は杭 2, 杭 2 の右は杭 0 とみなします。上の規則を式で表すと, 次のようになります。

定理 2. 円盤 n 枚のハノイの塔において, すべての円盤を杭 0 から杭 2 に移動する最小手数解法を考える。その手順の段階 k に円盤 d がある杭の番号 $p_{02}(d,k)$ は, 次式で表すことができる：

$$p_{n,02}(d,k) = \mathrm{mod}\left((-1)^{n-d+1}\left[\frac{k}{2^d}+\frac{1}{2}\right], 3\right), \quad 0 \leqq k \leqq 2^n - 1. \tag{1}$$

ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数, $\mathrm{mod}(y,z)$ は y を z で割った余りを表す。

定理 2 が成り立つことを確認してみます。式 (1) に $n=5$, $k=13$, $d=1, 2, 3, 4, 5$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
p_{5,02}(1,13) &= \mathrm{mod}\big(-\big[\tfrac{13}{2}+\tfrac{1}{2}\big], 3\big) = \mathrm{mod}(-7,3) = 2,\\
p_{5,02}(2,13) &= \mathrm{mod}\big(\big[\tfrac{13}{4}+\tfrac{1}{2}\big], 3\big) = \mathrm{mod}(3,3) = 0,\\
p_{5,02}(3,13) &= \mathrm{mod}\big(-\big[\tfrac{13}{8}+\tfrac{1}{2}\big], 3\big) = \mathrm{mod}(-2,3) = 1,\\
p_{5,02}(4,13) &= \mathrm{mod}\big(\big[\tfrac{13}{16}+\tfrac{1}{2}\big], 3\big) = \mathrm{mod}(1,3) = 1,\\
p_{5,02}(5,13) &= \mathrm{mod}\big(-\big[\tfrac{13}{32}+\tfrac{1}{2}\big], 3\big) = \mathrm{mod}(0,3) = 0.
\end{aligned}$$

確かに, これは表 1 の段階 13 の円盤配置 52 ; 43 ; 1 と一致しています。

定理 1 が「人間にわかりやすい」解法であるのに対し, 定理 2 は「コンピュータにわかりやすい」解法だと思います。この解説文の 2 節では定理 1 を, 3 節では定理 2 を証明します。ハノイの塔を扱った書籍 [1] を読んだところ, 2 節の命題 1, 2, 3 および定理 2 に相当する記述がありました。しかし, 証明が省略されていたり, 証明が簡略すぎてわかりにくいと思いました。また, 命題 4 に類する記述はありませんでした。（書籍 [1] はハノイの塔の研究書ですが, 本来のハノイの塔を扱っているのは, 2.1 節のわずか 12 ページだけです。）この解説文では, できる限りていねいに証明を書いたつもりです。

2　定理 1 の証明

定理 1 を 4 つの命題に分けて証明します。命題 1 では, 円盤 n 枚のハノイの塔は $2^n - 1$ 手で解決できることを証明します。命題 2 では, 命題 1 の手順がハノイの塔を解くただ 1 つの最小手数解法であることを証明します。命題 3 では, 命題 2 の最小手数解法の過程において, 偶奇が同じ円盤が重ならないことを証明します。命題 4 では, 偶奇解法が命題 1 の手順を与えることを証明します。命題 1, 2, 3 は数学的帰納法で証明します。ハノイの塔は数学的帰納法の例題としても, とても良い教材だと思います。

命題 1. 円盤 n 枚のハノイの塔において, $2^n - 1$ 手ですべての円盤を杭 0 から杭 2 に移動できる。

証明. 円盤の枚数 n に関する数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき, 1 手で円盤 1 枚を杭 0 から杭 2 に移動できることは明らかである。

$n = k$ のとき, この命題の主張が成り立つと仮定し, $n = k + 1$ のときも成り立つことを証明する。

円盤 $k + 1$ 枚のハノイの塔を考える (図 2.1)。帰納法の仮定より, $2^k - 1$ 手で杭 0 の円盤 k 枚を杭 1 に移動できる (図 2.2)。次に, 1 手で杭 0 に残った円盤 1 枚を杭 2 に移動できる (図 2.3)。再び帰納法の仮定より, $2^k - 1$ 手で杭 1 の円盤 k 枚を杭 2 に移動できる (図 2.4)。以上でかかった手数を求めると,

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1. \tag{2}$$

したがって, $2^{k+1} - 1$ 手で杭 0 の円盤 $k + 1$ 枚を杭 2 に移動させることができる。

以上より, 命題の主張は $n = k + 1$ のときも成り立つ。したがって, 数学的帰納法により, 任意の整数 $n \geqq 1$ に対して命題の主張は証明できた。 □

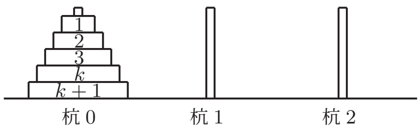


図 2.1: 初期状態 ($k = 4$)

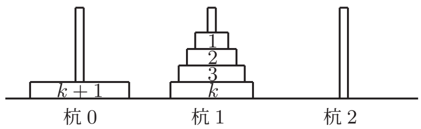


図 2.2: 円盤 k 枚を杭 1 に移動

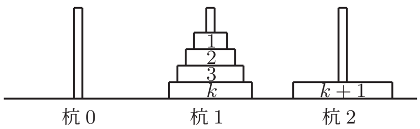


図 2.3: 最大の円盤を杭 2 に移動

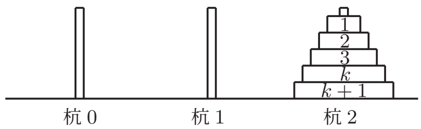


図 2.4: 円盤 k 枚を杭 2 に移動

命題 2. 円盤 n 枚のハノイの塔を解くのに必要な最小手数は $2^n - 1$ 手であり, この手順はただ 1 つである。また, 最大の円盤が移動するのは 2^{n-1} 手めの 1 回だけである。

証明. 円盤の枚数 n に関する数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき, 杭 0 から杭 2 に移動するのに必要な最小手数が 1 手であることは明らかである。

$n = k$ のとき, この命題の主張が成り立つと仮定し, $n = k + 1$ のときも成り立つことを証明する。

円盤 $k + 1$ 枚のハノイの塔を考える。最大の円盤がある杭から他の杭に移動するとき, 他の k 枚の円盤はそれら 2 つの杭とは別の杭になければならない。すべての円盤が杭 0 にある状態から, 最大の円盤が杭 0, 他の k 枚の円盤が他の杭 (杭 α と呼ぶ, $\alpha \neq 0$) にある状態になるまでの最小手数は, 帰納法の仮定より, $2^k - 1$ 手で

あり, この手順はただ 1 つである。同様に, 最大の円盤が杭 2, 他の k 枚の円盤が他の杭 (杭 β と呼ぶ, $\beta \neq 2$) にある状態から, すべての円盤が杭 2 にある状態になるまでの最小手数も, 帰納法の仮定より, $2^k - 1$ であり, この手順はただ 1 つである。

最大の円盤が杭 0 から杭 2 に移動するのに少なくとも 1 手は必要だから, すべての円盤が杭 0 から杭 2 に移動するに必要な最小手数は, 式 (2) と同じ計算により, $2^{k+1} - 1$ 手である。このとき, $\alpha = \beta = 1$ であり, 最大の円盤が移動するのは 2^k 手めの 1 回だけである。したがって, $k+1$ 枚の円盤を杭 0 から杭 2 に移動させるのに必要な最小手数は $2^{k+1} - 1$ 手であり, その手数はただ 1 つである。また, 最大の円盤が移動するのは 2^k 手めの 1 回だけである。

以上より, 命題の主張は $n = k+1$ のときも成り立つ。したがって, 数学的帰納法により, 任意の整数 $n \geqq 1$ に対して命題の主張は証明できた。 □

命題 3. 円盤 n 枚のハノイの塔の最小手数解法において, 偶奇が同じ円盤が重なることはない。

証明. 次の主張を n に関する数学的帰納法で証明する：

> **主張☆** 円盤 n 枚のハノイの塔において, 3 本の杭にはそれぞれ仮想円盤 $n+1$, $n+2$, $n+3$ があるとみなす。このとき, n 枚の円盤を仮想円盤 $n+1$ がある杭から仮想円盤 $n+3$ がある杭に最小手数で移動させるとき, 偶奇が同じ円盤どうしは重ならない。

$n = 1$ のとき, 円盤 1 は仮想円盤 2 の杭から仮想円盤 4 の杭に 1 手で移動できるが, 0 手めにおいても 1 手目においても偶奇が同じ円盤が重なることはない。したがって, $n = 1$ のとき, 主張☆は成り立つ。

$n = k$ のとき, 主張☆が成り立つと仮定し, $n = k+1$ のときも成り立つことを証明する。円盤 $k+1$ 枚のハノイの塔を考える (図 3.1)。まず, 仮想円盤 $k+2$ と $k+4$ の番号を入れ替える (図 3.2)。このことによって, 円盤番号の偶奇は変わらない。最大の円盤 (円盤 $k+1$) は杭 0 に固定し移動させないとすると, 円盤 1 から $k+3$ までの配置は円盤 k 枚の場合と同じである。したがって, 最小手数解法によって, 円盤 1 から k までの k 枚を円盤 $k+1$ がある杭 (杭 0) から円盤 $k+3$ がある杭 (杭 1) に移動させることができる (図 3.3)。帰納法の仮定より, この過程において偶奇が同じ円盤どうしは重ならない。

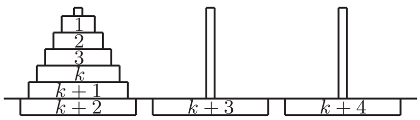


図 3.1: 初期状態 $(k = 4)$

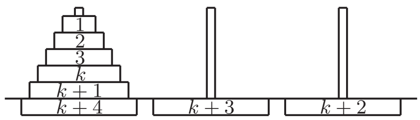


図 3.2: $k+2$ と $k+4$ の番号を入れ替え

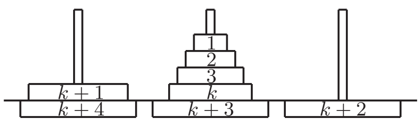


図 3.3: 最小手数で k 枚を杭 1 に移動

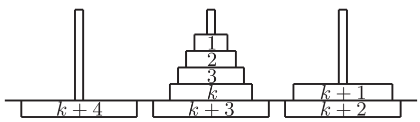


図 3.4: 最大の円盤を杭 2 に移動

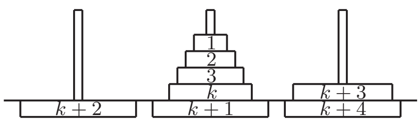


図 3.5: $k+2$ と $k+4$ の番号を元に戻し,
$k+1$ と $k+3$ の番号を入れ替える

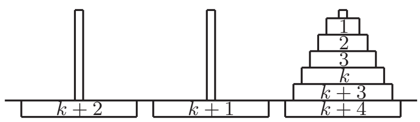


図 3.6: 最小手数で k 枚を杭 2 に移動

次に, 円盤 $k+1$ を円盤 $k+2$ のある杭 (杭 2) に移動させる (図 3.4)。この過程において偶奇が同じ円盤どうしは重ならない。

円盤 $k+2$ と $k+4$ の番号を元に戻し, 円盤 $k+1$ と仮想円盤 $k+3$ の番号を入れ替える (図 3.5)。このことによって, 円盤番号の偶奇は変わらない。最大の円盤 (円盤 $k+3$) は杭 2 に固定し移動させないとすると, 円盤 1 から $k+3$ までの配置は円盤 k 枚の場合と同じとみなすことができる。したがって, 最小手数解法によって, 円盤 1 から k までの k 枚の円盤を円盤 $k+1$ がある杭 (杭 1) から円盤 $k+3$ がある杭 (杭 2) に移動させることができる (図 3.6)。帰納法の仮定より, この過程において偶奇が同じ円盤どうしは重ならない。

以上より, 主張☆は $n=k+1$ のときも成り立つ。したがって, 数学的帰納法により, 任意の整数 $n \geqq 1$ に対して主張☆は証明できた。 □

命題 4. 円盤 n 枚のハノイの塔において, 偶奇解法は最小手数解法を定める。

証明. 最小手数解法のそれぞれの手において, 偶奇解法が唯一の次の手を定めることを証明する。

n が奇数と仮定して証明する。杭 0, 1, 2 に仮想円盤 $n+1$, $n+2$, $n+3$ があると仮定すると, 円盤 0 枚のときの 3 つの杭の最も上の円盤の偶奇は, 偶 2 枚, 奇 1 枚である。これに n 枚の円盤を乗せてると, 円盤 1 枚乗せるごとに 1 つの偶奇が変わるから, 円盤 n 枚のときの 3 つの杭の最も上の円盤 (仮想円盤も含む) の偶奇は, 偶 1 枚, 奇 2 枚である。円盤 3 枚のうちの 1 枚は 1 (奇数) であるから, 他の 2 枚は偶 1 枚, 奇 1 枚である。

場合 1. 前回移動したのが円盤 1 の場合, 次回, 円盤 1 は移動することができない。したがって, 他の 2 枚のうち小さい方を大きい方の上に乗せるのが次回の唯一の手である。

場合 2. 前回移動したのが円盤 1 でない場合, 移動した円盤を l, もう 1 つの円盤を m とする。円盤 l の移動元は円盤 m であるから, 円盤 m が円盤 l より大きい。つまり, 円盤 m を円盤 l の上に乗せることができない。したがって, 円盤 1 を偶数の円盤に乗せるのが次回の唯一つの手である。

場合 1, 2 より, n が奇数のとき, 偶奇解法の条件を満たす次の手は唯一に定まる。 n が偶数の場合も同様にして証明できる。 □

3 定理 2 の証明

定理 2 の証明. 円盤の枚数 n に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき, 円盤 1 は段階 0 で杭 0 に, 段階 1 で杭 2 にある。すなわち, $p_{1,02}(1,0)=0$, $p_{1,02}(1,1)=2$ である。これは式 (1) が $n=1$ のとき成り立つことを意味している。

次に, $n=r$ のとき式 (1) が成り立つと仮定し, $n=r+1$ のときにも成り立つことを証明する。 $n=r$ のとき成り立つのだから,

$$p_{r,02}(d,k) = \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+1}\left[\frac{k}{2^d}+\frac{1}{2}\right], 3\Big), \quad 0 \leqq k \leqq 2^r-1, \quad 1 \leqq d \leqq r. \tag{3}$$

式 (3) において, $-1 \equiv 2$, $-2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから, mod の変数に -1 をかけると 1 と 2 が入れ替わる。したがって,

$$p_{r,01}(d,k) = \mathrm{mod}\Big(-(-1)^{r-d+1}\left[\frac{k}{2^d}+\frac{1}{2}\right], 3\Big), \quad 0 \leqq k \leqq 2^r-1, \quad 1 \leqq d \leqq r. \tag{4}$$

式 (4) において, mod の変数に 1 を足すと, 0 が 1 に 1 が 2 に変わる。したがって,

$$p_{r,12}(d,k) = \mathrm{mod}\Big(-(-1)^{r-d+1}\left[\frac{k}{2^d}+\frac{1}{2}\right]+1, 3\Big), \quad 0 \leqq k \leqq 2^r-1, \quad 1 \leqq d \leqq r. \tag{5}$$

円盤 $r+1$ 枚のハノイの塔を考える。命題 2 より, 円盤 $r+1$ が移動するのは, 2^r 手めだけであるから,

$$p_{r+1,02}(r+1,k) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq k \leqq 2^r - 1) \\ 2 & (2^r \leqq k \leqq 2^{r+1} - 1). \end{cases} \tag{6}$$

円盤 $r+1$ は 2^r 手めに杭 0 から 2 に移動するのだから, 段階 $2^r - 1$ と 2^r において, 1 から r までの円盤は杭 1 にある。 1 から r までの円盤は段階 0 には杭 0 にあり, 段階 $2^r - 1$ には杭 1 にある。命題 2 より, これは杭 0 から 1 に移動させる最小手順であり, その手順は唯一である。したがって, 式 (4) より,

$$p_{r+1,02}(d,k) = \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+2}\left[\frac{k}{2^d} + \frac{1}{2}\right], 3\Big), \quad 0 \leqq k \leqq 2^r - 1, \quad 1 \leqq d \leqq r. \tag{7}$$

そして, 1 から r までの円盤は段階 2^r には杭 1 にあり, 段階 $2^{r+1} - 1$ には杭 2 にある。命題 2 より, これは杭 1 から 2 に移動させる最小手順であり, その手順は唯一である。したがって, 式 (5) より,

$$\begin{aligned} p_{r+1,02}(d, 2^r + k) &= \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+2}\left[\frac{k}{2^d} + \frac{1}{2}\right] + 1, 3\Big), \\ &= \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+2}\left[\frac{k}{2^d} + \frac{1}{2}\right] + 2^{d-r} \cdot \frac{2^r}{2^d}, 3\Big), \\ &= \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+2}\left[\frac{k}{2^d} + \frac{1}{2}\right] + (-1)^{d-r} \cdot \frac{2^r}{2^d}, 3\Big), \\ &= \mathrm{mod}\Big((-1)^{r-d+2}\left[\frac{2^r + k}{2^d} + \frac{1}{2}\right], 3\Big), \quad 0 \leqq k \leqq 2^r - 1, \quad 1 \leqq d \leqq r. \end{aligned} \tag{8}$$

式 (6), (7), (8) は式 (1) が $n = r+1$ のときに成り立つことを表している。以上より, 数学的帰納法により, 任意の整数 $n \geqq 1$ に対して定理 2 が証明できた。 □

参考文献

[1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović and C. Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths, Springer Basel, 2013. (ISBN 978-3-0348-0236-9)