

# 正 $n$ 角形のサイクロイド

江口 喬信\* 市延 邦夫\*\*

\* 大学院学生

\*\* 数学教育講座

## On Cycloid by Regular $n$ -gon

Takanobu EGUCHI\* and Kunio ICHINOBE\*\*

\*Graduate Student, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

\*\*Department of Mathematics Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

### 1 はじめに

私たちは、高校で媒介変数表示（パラメータ表示）について学習する際に、初めて円のサイクロイドについて知る。円のサイクロイドとは円を  $x$  軸上を滑らずに転がしたときの円上のある1点の軌跡である（高校の教科書を参照[1]）。第一著者が高校生当時には気にならなかった疑問を、再度、大学院で円のサイクロイドに触れた際に持つこととなった。その疑問とは次の①と②である。

円は、内接（外接でも良い）正  $n$  角形の頂点の数  $n$  を大きくしたときの極限と見ることができるので

① 転がす図形を正  $n$  角形に変えたときのある1つの頂点の軌跡（ここでは正  $n$  角形のサイクロイド、または略して  $n$ -サイクロイドと呼ぶことにする）はどのような関数になっているのか

②  $n$  を限りなく大きくしていくと、 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示は円のサイクロイドの媒介変数表示に収束していくのか

そこで、 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示を与え、 $n$ -サイクロイドの曲線の長さや  $n$ -サイクロイドと  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求め、それらの極限を取ることによってそれぞれ円のサイクロイドの媒介変数表示、曲線の長さ、面積に収束するのかを調べる。

この論文は以下のように構成される。第2章では、準備として、円の媒介変数表示や円のサイクロイドの媒介変数表示、曲線の長さ、面積を（証明なしで）与え、さらにこの論文で使われる三角関数の和の公式を導出する。最後に正  $n$  角形の一辺の長さや対角線の長さ、面積を与える。第3章では、 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示を与える。はじめに具体例として正3角形のサイクロイドの媒介変数表示を求める。次に、一般の  $n$  の場合について  $n$ -サイクロイドの媒介変数表示を求め、その極限が円のサイクロイドの媒介変数表示に収束する

ことを示す。第4章では、 $n$ -サイクロイドの曲線の長さを求め、その極限が円のサイクロイドの曲線の長さに収束することを示す。第5章では、 $n$ -サイクロイドと  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求め、その極限が円のサイクロイドと  $x$  軸で囲まれた面積に収束することを示す。

先行研究として SSH 生徒課題研究レポートから埼玉県立春日部高等学校の生徒たちが行った研究を挙げておく（[2]）。その研究で彼らは私たちと同じ問題を考えている。軌跡を追う点と回転の中心を結ぶ線分の回転角を媒介変数として、 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示を求め、関数グラフソフト「GRAPES」を用いて  $n$  が大きくなるにつれて円のサイクロイドに収束する様子を見ている。また  $n$ -サイクロイドの曲線の長さや面積を求め（面積は類推）、極限については区分求積法を用いて、円のサイクロイドの曲線の長さや面積とそれぞれ一致することを示している。

私たちは、円のサイクロイドの媒介変数表示を参考にして媒介変数を定め、 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示を求め（定理5）、その極限を取ることによって円のサイクロイドの媒介変数表示に収束することを示した（定理7）。 $n$ -サイクロイドの曲線の長さや面積については、三角関数の和の公式を用いて導いた。

最後にここで扱った  $n$ -サイクロイドとは別に、離散サイクロイドと呼ばれるものがある。詳細は[3]を見よ。

### 2 準備

#### 2.1 円の媒介変数表示

ここでは、円の媒介変数表示を与える。

$xy$  座標平面上中心が点  $(a, b)$ 、半径  $r$  の円の方程式の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x - a = r \cos \theta \\ y - b = r \sin \theta \end{cases}$$

と与えられる。ここで、媒介変数  $\theta$  は  $\theta \in [-\pi, \pi]$  とする。

通常媒介変数  $\theta$  は、動点  $P(x, y)$  と中心  $A(a, b)$  を結ぶ線分と  $x$  軸の正の部分とのなす角 ( $P$  の座標が  $(a+r, b)$  のとき  $\theta=0$  とする) として選び、 $\theta$  が増えるにつれて動点  $P$  は反時計回りに円周上を1周する。

線分  $PA$  と  $x$  軸の負の部分とのなす角を  $\varphi$  とする。すなわち、 $\theta = \pi - \varphi$  とする。このとき、中心が点  $(a, b)$ 、半径  $r$  の円の方方程式の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x - a = -r \cos \varphi \\ y - b = r \sin \varphi \end{cases}$$

と与えられる。ここで、媒介変数  $\varphi$  は  $\varphi \in [0, 2\pi]$  であり、 $\theta$  が増えるにつれて動点  $P$  は時計回りに円周上を1周する。

## 2.2 円のサイクロイド

ここでは、円のサイクロイドの媒介変数表示、曲線の長さ、面積の公式を与える (詳細は例えば高校の教科書 [1] を参照せよ)。

1つの円が、定直線に接しながら滑らずに回転するとき、円周上に固定された点  $P$  が描く曲線をサイクロイド (ここでは円のサイクロイドと呼ぶ) という。半径  $a$  の円が  $x$  軸と原点で接しているとし、点  $P$  が原点  $O$  に重なっているとす。このときの位置から円が角  $\theta$  だけ回転したときの点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする。このとき、円のサイクロイドの媒介変数表示は次で与えられる。

### 補題 1.

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta).$$

また、 $\theta \in [0, 2\pi]$ 、すなわち、円が  $x$  軸上を1周するとき、円のサイクロイドと  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $S$  とする。さらにこのときの円のサイクロイドの長さを  $L$  とする。このとき、次が成り立つ。

### 補題 2.

$$S = 3\pi a^2, \quad L = 8a.$$

## 2.3 三角関数の和の公式

ここでは、次の三角関数の和の公式を証明する。

### 補題 3. $\theta \in \mathbb{R}$ のとき次が成り立つ。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \sum_{\ell=1}^n \cos \ell \theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ \sum_{\ell=1}^n \sin \ell \theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

証明.  $z \in \mathbb{C}$  に対して、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$  とおく。初めに  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$  とする。

$$1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

であることから

$$(2.2) \quad \frac{z(1 - z^n)}{1 - z} = z + z^2 + z^3 \cdots + z^n$$

である。またド・モアブルの定理 ([1] 参照) から

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - \cos(n)\theta - i \sin(n)\theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$$

であるため、三角関数の半角の公式を分母と分子に用いて、分母と共役な複素数を分母と分子に掛けることにより

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{n-1}{2}\theta + i \sin \frac{n-1}{2}\theta \right)$$

となり、これに  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  を掛けることで

$$\frac{z(1 - z^n)}{1 - z} = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{n+1}{2}\theta + i \sin \frac{n+1}{2}\theta \right)$$

を得る。したがって、再びド・モアブルの定理に注意して、(2.2) の両辺の実部と虚部を眺めることによって (2.1) を得る。

次に  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$  のときは三角関数の周期性と公式

$$\begin{aligned} \cos(\theta + m\pi) &= (-1)^m \cos \theta, \\ \sin(\theta + m\pi) &= (-1)^m \sin \theta \end{aligned}$$

( $m$  は整数) と  $\theta \rightarrow 0$  の極限を考え、公式 (2.1) において次の公式

$$(2.3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を使うことにより公式 (2.1) がすべての実数  $\theta$  に対して成り立つことがわかる。□

## 2.4 円に内接する正 $n$ 角形に関する事実

ここでは、半径  $a$  の円に内接する正  $n$  角形の一辺、対角線の長さや面積を与える。

$xy$  平面上原点  $O$  を中心とし、半径  $a$  の円に内接する正  $n$  角形の頂点を反時計回りに  $A_1, A_2, \dots, A_n$  と名付ける。ただし、 $A_1$  は座標  $(a, 0)$  とする。また利便性のため、 $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$  とする。このとき、他の頂点  $A_{\ell+1}$  ( $\ell = 1, \dots, n-1$ ) の座標は

$$\left( a \cos \frac{2\ell}{n}\pi, a \sin \frac{2\ell}{n}\pi \right)$$

と与えられる (三角関数の定義と  $\angle A_1 O A_{\ell+1} = \frac{2\ell}{n}\pi$ )

( $\ell = 1, \dots, n-1$ ) より得られる)。

一辺の長さを  $s_n$  とすると

$$s_n = A_\ell A_{\ell+1} \quad (\ell = 0, 1, \dots, n)$$

である。ここで、 $AB$  は点  $A$  と点  $B$  を結ぶ線分  $AB$  の長さを表す。また、正  $n$  角形の対角線  $A_1 A_{\ell+1}$  ( $\ell = 0, 1, \dots, n$ ) の長さを  $t_{n,\ell}$  とする。このとき、

$$t_{n,1} = s_n$$

である。最後に正  $n$  角形の面積を  $S_n$  とする。このとき、次が成り立つ。

補題 4. 半径  $a$  の円に内接する正  $n$  角形において

i)

$$s_n = 2a \sin \frac{\pi}{n}.$$

ii)

$$t_{n,\ell} = 2a \sin \frac{\ell\pi}{n} \quad (\ell = 0, 1, \dots, n).$$

iii)

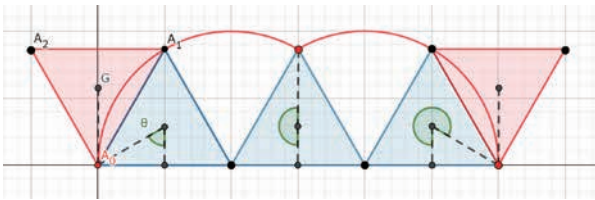
$$S_n = \frac{n}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

実際、i), iii) については、 $\triangle OA_1 A_2$  において、 $\angle A_1 O A_2 = \frac{2\pi}{n}$ ,  $OA_1 = OA_2 = a$  より得られる。ii) は 2 点間の距離の公式より得られる。

### 3 $n$ -サイクロイドの媒介変数表示

#### 3.1 正 3 角形の場合

半径  $a$  の円に内接する正 3 角形の頂点を反時計回りに  $A_0, A_1, A_2$  とし、その円の中心を  $G$  とする。また、線分  $A_0 G$  と鉛直下向きとのなす角を  $\theta$  とし、 $\theta = 0$  で頂点  $A_0$  を原点と重なるように正 3 角形を置いた状態から転がしていく。このとき、頂点  $A_0$  ( $x_3, y_3$ ) の軌跡の媒介変数表示を与える。



$\theta \in [0, \frac{\pi}{3})$  のとき、点  $A_0$  ( $x_3, y_3$ ) は動かずに原点に留まるため

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

となる。

$\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$  のとき、点  $A_0$  ( $x_3, y_3$ ) の軌跡は中心が  $A_1$  であり、半径

$$t_{3,1} = 2a \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}a$$

の円弧となる。このときの  $A_1$  の座標は

$$(s_3, 0) = (2a \sin \frac{\pi}{3}, 0) = (\sqrt{3}a, 0)$$

である。また、辺  $A_0 A_1$  と  $x$  軸の負の部分とのなす角を  $\varphi$  とすると

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{3}$$

となるため

$$\begin{cases} x_3 - \sqrt{3}a = -\sqrt{3}a \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right), \\ y_3 = \sqrt{3}a \sin \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{cases}$$

で与えられる。

$\theta \in [\pi, \frac{5}{3}\pi)$  のとき、点  $A_0$  ( $x_3, y_3$ ) の軌跡は中心が  $A_2$  で、半径

$$t_{3,2} = 2a \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3}a$$

の円弧となる。このときの  $A_2$  の座標は

$$(2s_3, 0) = (2 \times 2a \sin \frac{\pi}{3}, 0) = (2\sqrt{3}a, 0)$$

である。また、辺  $A_0 A_2$  と  $x$  軸の負の部分とのなす角を  $\varphi$  とすると

$$\varphi = \theta - \frac{2}{3}\pi$$

となるため

$$\begin{cases} x_3 - 2\sqrt{3}a = -\sqrt{3}a \cos \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right), \\ y_3 = \sqrt{3}a \sin \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) \end{cases}$$

で与えられる。

$\theta \in [\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$  のとき、点  $A_0$  ( $x_3, y_3$ ) は動かないので、上式において  $\theta = \frac{5}{3}\pi$  を代入して

$$\begin{cases} x_3 = 3\sqrt{3}a, \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

となる。

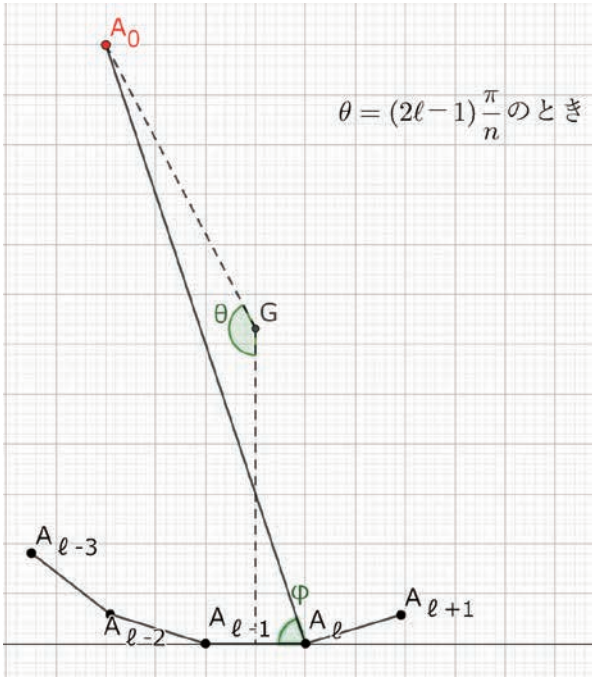
#### 3.2 一般の正 $n$ 角形の場合

半径  $a$  の円に内接する正  $n$  角形の頂点を反時計回りに  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  とし、その円の中心を  $G$  とする。ここで、利便性のため、 $A_n = A_0, A_{n+1} = A_1$  とする。また、線分  $A_0 G$  と鉛直下向きとのなす角を  $\theta$  とし、 $\theta = 0$  で頂点  $A_0$  を原点と重なるように正  $n$  角形を置いた状態から転がしていく。このとき、頂点  $A_0$  ( $x_n, y_n$ ) の軌跡の媒介変数表示を与える。

初めに記号を用意する。 $\ell = 0, 1, \dots, n$  に対して

$$I_\ell^n := \left[ (2\ell - 1)\frac{\pi}{n}, (2\ell + 1)\frac{\pi}{n} \right) \cap [0, 2\pi]$$

とおく。



$\ell = 0, 1, \dots, n$  に対して,  $I_{\ell}^n \ni \theta$  のとき, 点  $A_0(x_n, y_n)$  の軌跡は中心が  $A_{\ell}$  で, 半径  $A_0A_{\ell} = A_{\ell}A_{\ell+1} = t_{n,\ell}$  の円弧となる。このときの  $A_{\ell}$  の座標は

$$(ls_n, 0) := (\ell \times 2a \sin \frac{\pi}{n}, 0)$$

であり, また辺  $A_0A_{\ell}$  と  $x$  軸の負の部分とのなす角を  $\varphi$  とすると

$$\varphi = \theta - \frac{\ell}{n}\pi$$

となるため

$$\begin{cases} x_n - 2a\ell \sin \frac{\pi}{n} = -t_{n,\ell} \cos \left( \theta - \frac{\ell}{n}\pi \right) \\ y_n = t_{n,\ell} \sin \left( \theta - \frac{\ell}{n}\pi \right) \end{cases}$$

で与えられる。すなわち

定理5.  $0 \leq \ell \leq n$  に対して  $\theta \in I_{\ell}^n$  のとき

$$\begin{cases} x_n = 2a\ell \sin \frac{\pi}{n} - 2a \sin \frac{\ell}{n}\pi \cos \left( \theta - \frac{\ell}{n}\pi \right), \\ y_n = 2a \sin \frac{\ell}{n}\pi \sin \left( \theta - \frac{\ell}{n}\pi \right) \end{cases}$$

で与えられる。

上の定理において,  $\ell = 0, n$  のとき動点は動かないことが分かる。

$\theta \in I_{\ell}^n$  のとき

$$\ell = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right]$$

と書くことができる。ここで,  $a \in \mathbb{R}$  に対して,  $[a]$  は  $a$  の整数部分を表す。

この記号を用いると場合分けせずに軌跡を表現することができる。

系6.  $\theta \in [0, 2\pi]$  に対して

$$\begin{cases} x_n = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \cdot 2a \sin \frac{\pi}{n} \\ \quad - 2a \sin \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \cos \left( \theta - \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \right), \\ y_n = 2a \sin \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \sin \left( \theta - \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \right) \end{cases}$$

で与えられる。

三角関数の積和公式を使うと

$$\begin{cases} x_n = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \cdot 2a \sin \frac{\pi}{n} \\ \quad - a \left( \sin \theta - \sin \left( \theta - 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi \right) \right), \\ y_n = -a \left( \cos \theta - \cos \left( \theta - 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi \right) \right) \end{cases}$$

となる。この表示より直ちに次を得ることができる。

定理7.  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{cases} x = x_n, \\ y = y_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

証明. 実際,  $a - 1 < [a] \leq a$  とはさみうちの原理を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \cdot 2a \sin \frac{\pi}{n} = a\theta$$

となる。また

$$\Theta_n := \theta - \frac{2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n}$$

とおく。  $a - 1 < [a] \leq a$  を用いて

$$-\frac{\pi}{n} \leq \Theta_n < \frac{\pi}{n}$$

なので,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} \sin \left( -\frac{\pi}{n} \right) &\leq \sin \Theta_n < \sin \left( \frac{\pi}{n} \right), \\ \cos \left( -\frac{\pi}{n} \right) &= \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) \leq \cos \Theta_n \leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \theta - \frac{2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left( \theta - \frac{2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{\pi}\theta + 1 \right) \right] \pi}{n} \right) = 1$$

を得る。 □

#### 4 $n$ -サイクロイドの曲線の長さ

曲線の媒介変数表示が得られているので, 曲線の長

さ  $L_n$  を積分で求めることができるが、ここでは幾何学的に  $L_n$  を求める。具体的には、各区間  $I_\ell^n$  において、中心角が  $\frac{2\pi}{n}$ 、半径が  $t_{n,\ell}$  の扇形の弧の長さを求め、 $\ell$  についての和をとればよい。そこで、公式 (2.1) を用いれば、直ちに次が得られる。

定理 8.

$$L_n = \sum_{\ell=1}^n 2a \sin \frac{\ell}{n} \pi \times \frac{2\pi}{n} = \frac{4a\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2n} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

公式 (2.3) を用いて上式の極限を取ることによって次が得られる (証明は略)。

系 9.

$$L_n \rightarrow 8a \quad (n \rightarrow \infty).$$

### 5 面積

$n$ -サイクロイドと  $x$  軸で囲まれる部分の面積を  $S_n$  とすると、 $S_n$  は扇形の面積たちと正  $n$  角形の面積の和で与えられることが分かる。

定理 10.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{2} \left( 2a \sin \frac{\ell}{n} \pi \right)^2 \frac{2\pi}{n} + \frac{n}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= 2\pi a^2 + \frac{n}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

証明の概略を与える。この定理は本質的に、扇形以外の部分の面積を全て加えると回転している正  $n$  角形の面積に等しいことが言えればよい。

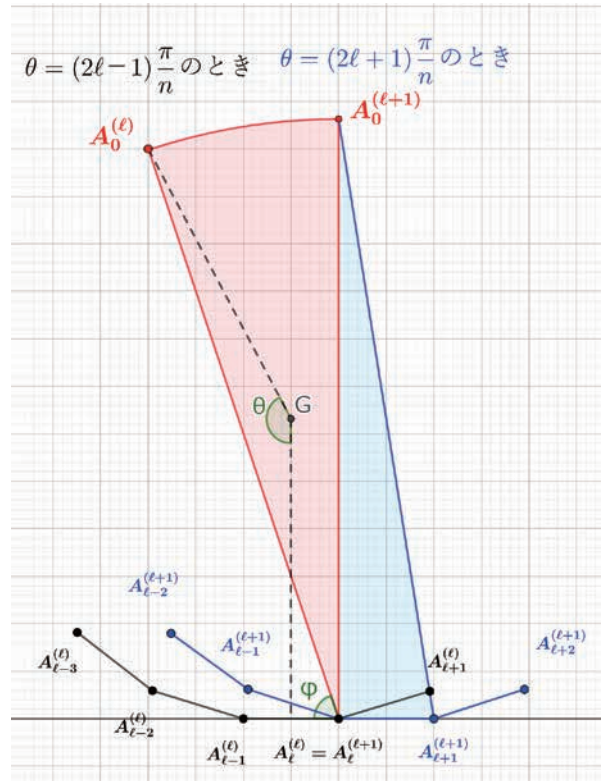
$j = 0, 1, \dots, n+1$  に対して、 $\theta = (2j-1) \frac{\pi}{n}$  のときの各頂点を  $A_\ell^{(j)}$  ( $\ell = 0, 1, \dots, n+1$ ) と書くことにすると、求める面積  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \text{扇形 } A_0^{(\ell)} A_\ell^{(\ell)} A_0^{(\ell+1)} + \Delta A_0^{(\ell+1)} A_\ell^{(\ell+1)} A_{\ell+1}^{(\ell+1)} \right\}$$

である。ここで、扇形  $A_0^{(\ell)} A_\ell^{(\ell)} A_0^{(\ell+1)}$  の中心角は  $\frac{2\pi}{n}$ 、半径は  $t_{n,\ell}$  である。また、 $\Delta A_0^{(\ell+1)} A_\ell^{(\ell+1)} A_{\ell+1}^{(\ell+1)} = \Delta A_0 A_\ell A_{\ell+1}$  なので

$$\sum_{\ell=1}^n \Delta A_0^{(\ell+1)} A_\ell^{(\ell+1)} A_{\ell+1}^{(\ell+1)} = \text{正 } n \text{ 角形の面積}$$

が分かる。



また定理5によって具体的な曲線の媒介変数表示を得ているので、直接積分することにより面積を得ることもできる。

最後に、極限を考えることにより次を得る (証明は略)。

系 11.

$$S_n \rightarrow 3\pi a^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

### 参考文献

- [1] 高等学校 数学 III, 第一学習社, 2015年発行
- [2] 正  $n$  角形の回転とサイクロイド, 埼玉県立春日部高等学校 2年1組 鎌田 翔太郎, 日下部 涼, 久保田 輝, 黒川 潤, 星野 佑, 山口 翔太郎, 平成23年度 <https://hugepdf.com/download/ssh-n.pdf#>
- [3] T. Hoffmann, Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces, 九州大学COEレクチャーノート, Vol. 18, 2009.

(2022年9月20日受理)